

## ESERCIZIO #4

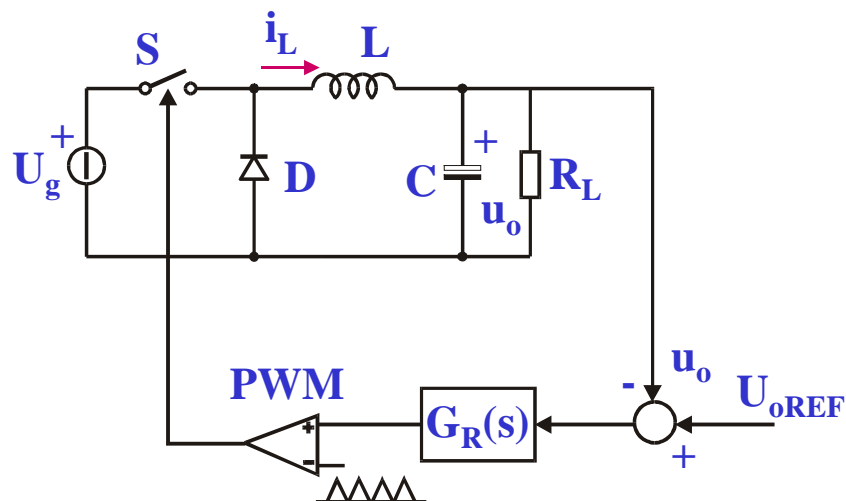
Si consideri il convertitore Buck mostrato in figura avente i seguenti parametri:

$$U_{gmin} = 72V, U_{gmax} = 90V, U_o = 48V, I_o = 5A, L = 224\mu H, C = 27\mu F, f_s = 100kHz$$

Si vuole:

1. progettare un regolatore PID per il controllo diretto del duty-cycle secondo lo schema di figura che abbia una banda superiore a  $f_s/10$  e un margine di fase di almeno  $45^\circ$  (verificare con diverse condizioni operative);
2. implementare il convertitore ed il controllo in simulink;
3. simulare l'andamento di  $i_L$  e  $u_C$  ad una variazione a gradino della tensione di ingresso dal valore massimo al valore minimo;
4. simulare l'andamento di  $i_L$  e  $u_C$  ad una variazione a gradino della resistenza di carico passando dal valore nominale ad un valore cinque volte superiore (con  $U_g = U_{gmax}$ );
5. Calcolare i valori di resistenze e condensatori necessari per implementare il regolatore PID mediante un amplificatore operazionale (considerato ideale). I valori dei componenti vanno scelti secondo la serie E12 di seguito riportata in modo che la f.d.t. reale così ottenuta approssimi al meglio quella ideale calcolata al punto 2;

(Soluzione)



Convertitore Buck con controllo diretto del duty-cycle

### VALORI RESISTENZE E CAPACITA'

#### SERIE E12

10	12	15	18	22	27	33	39	47	56	68	82
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

## SOLUZIONE

In funzionamento continuo, la funzione di trasferimento tra duty-cycle e tensione di uscita del convertitore buck è la seguente:

$$G_{ud1}(s, R_L) := U_g \cdot H_e(s, R_L)$$

dove

$$H_e(s, R_L) := \frac{1}{1 + s \cdot \frac{L_F}{R_L} + s^2 \cdot L_F \cdot C_F}$$

mentre in funzionamento discontinuo è data dalla seguente espressione:

$$G_{ud2}(s, R_L, M) := 2 \cdot U_g \cdot \sqrt{\frac{1-M}{k(R_L)}} \cdot \frac{1-M}{2-M} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R_L \cdot C_F \cdot \frac{1-M}{2-M}}$$

dove  $M$  è il rapporto di conversione e

$$k(R_L) := \frac{2 \cdot L_F \cdot f_s}{R_L}$$

La frequenza di risonanza del filtro di uscita è di circa 2kHz. Per ottenere una banda del controllo di tensione superiore ad un decimo della frequenza di commutazione occorre necessariamente utilizzare un regolatore che consenta un certo guadagno di fase in modo da avere il margine di fase desiderato nonostante che lo sfasamento introdotto dalla parte di potenza sia di  $180^\circ$ .

### DIMENSIONAMENTO DEL REGOLATORE PID

Progettiamo il regolatore considerando la massima tensione di ingresso e la corrente nominale di uscita. Dovremo poi verificare che tale progetto soddisfi le specifiche anche in altre condizioni operative. Scegliamo innanzitutto la frequenza di attraversamento:

$$f_c := \frac{f_s}{6}$$

Fissiamo la posizione del secondo polo del regolatore alla frequenza di commutazione in modo da filtrare in modo adeguato il rumore:

$$f_{p2} := 1 \cdot f_s$$

Facciamo ora l'ipotesi che il primo zero del regolatore verrà posizionato ad una frequenza inferiore ad un decimo della frequenza di attraversamento di modo che il suo contributo di fase sia prossimo a  $+90$  gradi. Fissato il margine di fase desiderato,

$$m_{\phi d} := 48 \cdot \frac{\pi}{180}$$

osserviamo che tale margine di fase deve essere garantito dalla coppia zero-polo del regolatore PID tenuto conto anche dell'effetto di ritardo introdotto dal secondo polo del regolatore. Pertanto, il guadagno di fase che la coppia zero-polo del regolatore deve provvedere risulta:

$$\Delta\phi := m_{\phi d} + \operatorname{atan}\left(\frac{f_c}{f_{p2}}\right)$$

Il massimo guadagno di fase della coppia zero-polo del regolatore si ha quando le loro frequenze risultano equidistanti (in scala logaritmica) dalla frequenza di attraversamento (in altre parole, quando quest'ultima risulta essere la media geometrica delle frequenze dello zero e del polo). Per cui possiamo scrivere:

$$f_{z2} := \frac{f_c}{\sqrt{k_d}}$$

$$f_{z2} = 4.864 \cdot 10^3$$

$$f_{p1} := \sqrt{k_d} \cdot f_c$$

$$f_{p1} = 5.711 \cdot 10^4$$

dove

$$k_d := \left( \tan(\Delta\phi) + \sqrt{1 + \tan(\Delta\phi)^2} \right)^2 \quad k_d = 11.742$$

Si posiziona ora il primo zero del regolatore in modo che alla frequenza di risonanza del filtro di uscita del convertitore la fase rimanga superiore ai -180 gradi.

$$f_{z1} := \frac{f_o}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{f_o}{f_{z2}}\right)\right)} \quad f_{z1} = 8.611 \cdot 10^2$$

Calcoliamo ora il guadagno di bode del regolatore affinché il guadagno di anello abbia un modulo unitario alla frequenza di attraversamento:

$$\omega_R := \frac{2 \cdot \pi \cdot f_{z1}}{\sqrt{k_d}} \cdot \frac{1}{\left| G_{ud1}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_c, R_{LN}) \right|} \quad \omega_R = 1.147 \cdot 10^3$$

La F.d.T del regolatore risulta:

$$G_R(s) := \frac{\omega_R \cdot \left(1 + \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot f_{z1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot f_{z2}}\right)}{s \cdot \left(1 + \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot f_{p1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot f_{p2}}\right)}$$

Diagramma di bode del modulo di  $G_R(j\omega)$  (Y: -40dB÷60dB, 20dB/div; X: 10Hz÷100kHz)

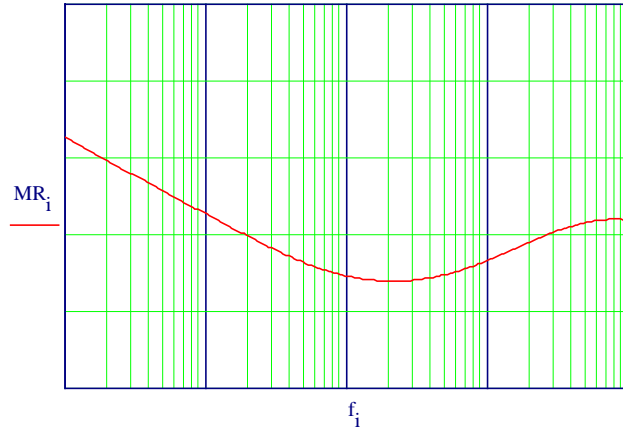
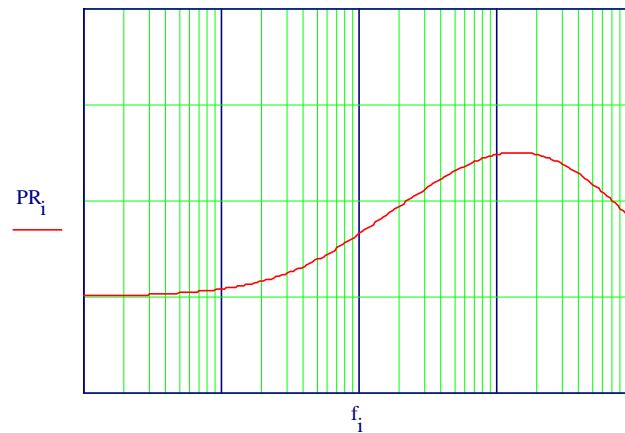


Diagramma di bode della fase di  $G_R(j\omega)$  (Y:  $-180^\circ \div +180^\circ$ ,  $90^\circ/\text{div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )



Il guadagno di anello risulta:

$$T_u(s) := G_{ud1}(s, R_{LN}) \cdot G_R(s)$$

Il diagramma di bode in modulo e fase del guadagno di anello è mostrato nelle figure seguenti in corrispondenza della massima tensione di ingresso e della potenza nominale.

Diagramma di bode del modulo di  $T_u(j\omega)$  (Y:  $-40\text{dB} \div 60\text{dB}$ ,  $20\text{dB}/\text{div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )

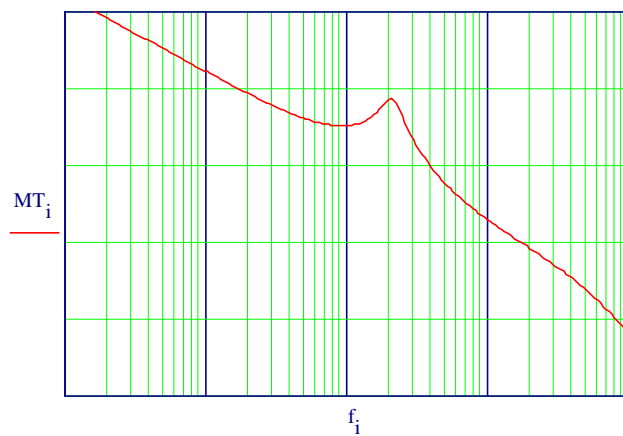
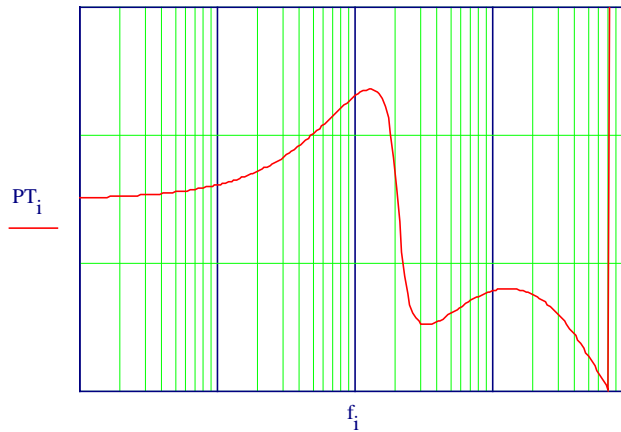


Diagramma di bode della fase di  $T_u(j\omega)$  (Y:  $-180^\circ \div 0^\circ$ ,  $60^\circ/\text{div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )



La frequenza effettiva di attraversamento e il margine di fase risultano:

$$f_{ce} = 1.65 \cdot 10^4 \quad m_{\phi e} = 47.27$$

Il guadagno a catena chiusa risulta:

$$G_{close}(s) := \frac{T_u(s)}{1 + T_u(s)}$$

ed il suo diagramma di bode è riportato di seguito in corrispondenza della massima tensione di ingresso e della potenza nominale.

Diagramma di bode del modulo di  $G_{close}(j\omega)$  (Y:  $-40\text{dB} \div 20\text{dB}$ ,  $10\text{dB/div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )

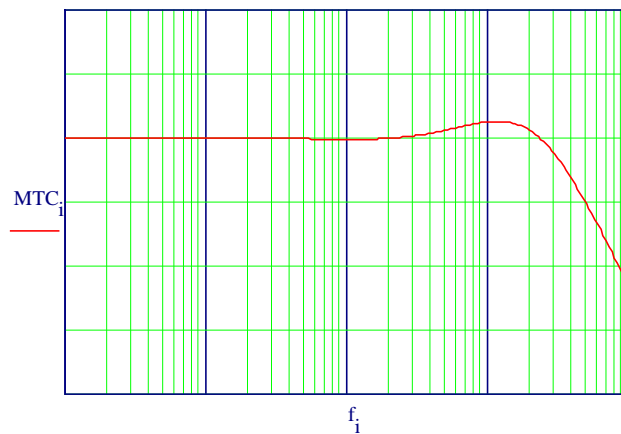
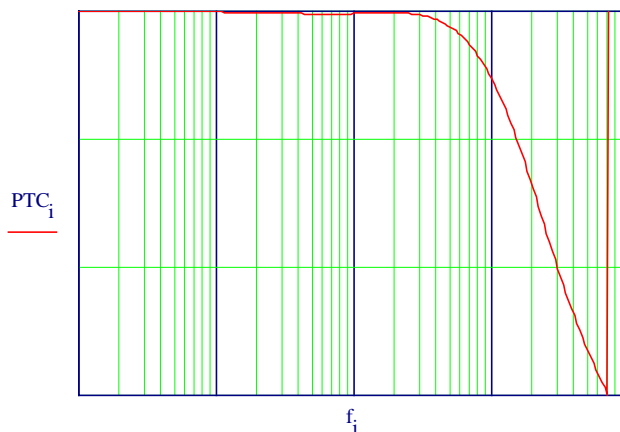


Diagramma di bode della fase di  $G_{close}(j\omega)$  (Y:  $-180^\circ \div 0^\circ$ ,  $60^\circ/\text{div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )



Verifichiamo ora che tale dimensionamento sia corretto anche in altre condizioni operative. A questo scopo calcoliamo il guadagno di anello in corrispondenza della minima tensione di ingresso e per una potenza di uscita pari ad un decimo della potenza nominale (corrisponde alla situazione limite tra il funzionamento CCM e DCM per questo convertitore).

Diagramma di bode del modulo di  $T_u(j\omega)$  per  $U_g = U_{gmin}$  e  $R_L = 10 \cdot R_{LN}$   
(Y: -40dB÷60dB, 20dB/div; X: 10Hz÷100kHz)

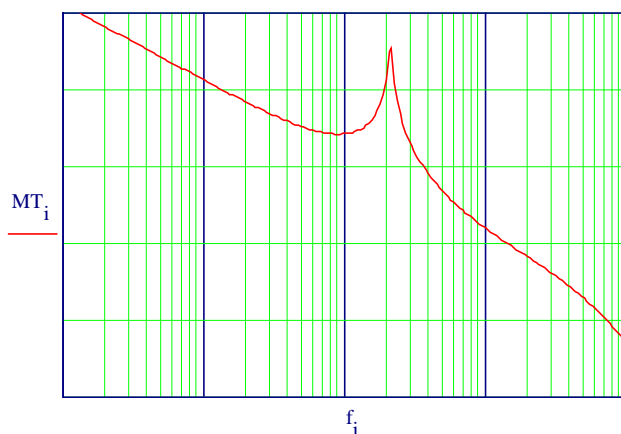
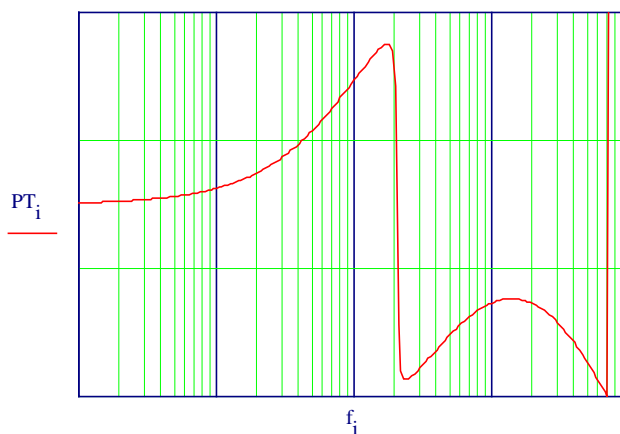


Diagramma di bode della fase di  $T_u(j\omega)$  per  $U_g = U_{gmin}$  e  $R_L = 10 \cdot R_{LN}$   
(Y: -180°÷0°, 60°/div; X: 10Hz÷100kHz)



In questa situazione l'effettiva frequenza di attraversamento e l'effettivo margine di fase risultano:

$$f_{ce} = 1.376 \cdot 10^4 \quad m_{\phi e} = 45.832$$

Verifichiamo anche il comportamento del sistema in funzionamento discontinuo. A questo scopo riportiamo gli andamenti del modulo e della fase del guadagno di anello in corrispondenza della minima tensione di ingresso e per una resistenza di carico pari a 10 volte quella nominale. Nel calcolo del guadagno di anello si deve chiaramente usare la f.d.t. relativa al funzionamento DCM.

Diagramma di bode del modulo di  $T_u(j\omega)$  per  $U_g = U_{gmin}$  e  $R_L = 10 \cdot R_{LN}$   
 Funzionamento discontinuo  
 (Y: -40dB÷60dB, 20dB/div; X: 10Hz÷100kHz)

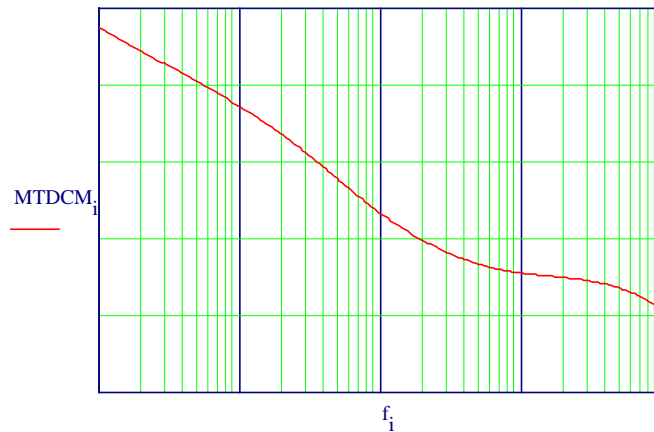
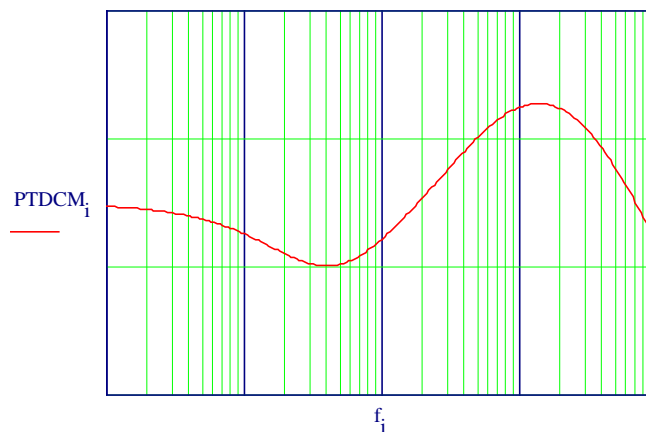


Diagramma di bode della fase di  $T_u(j\omega)$  per  $U_g = U_{gmin}$  e  $R_L = 20 \cdot R_{LN}$   
 Funzionamento discontinuo  
 (Y: -180°÷0°, 60°/div; X: 10Hz÷100kHz)



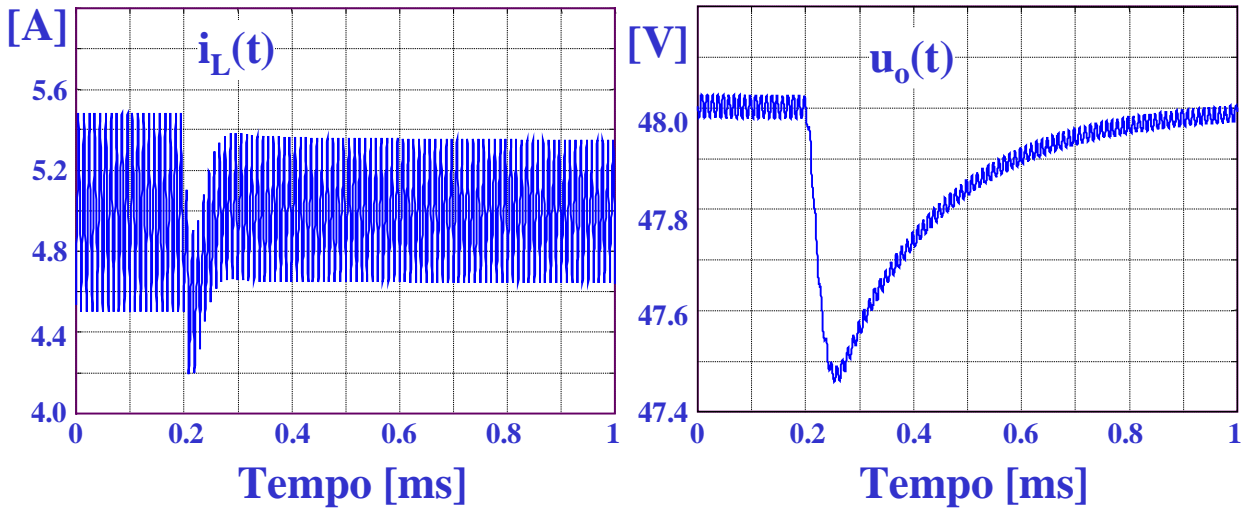
In questa situazione l'effettiva frequenza di attraversamento e l'effettivo margine di fase risultano:

$$f_{ce} = 1.852 \cdot 10^3 \quad m_{\phi e} = 90.539$$

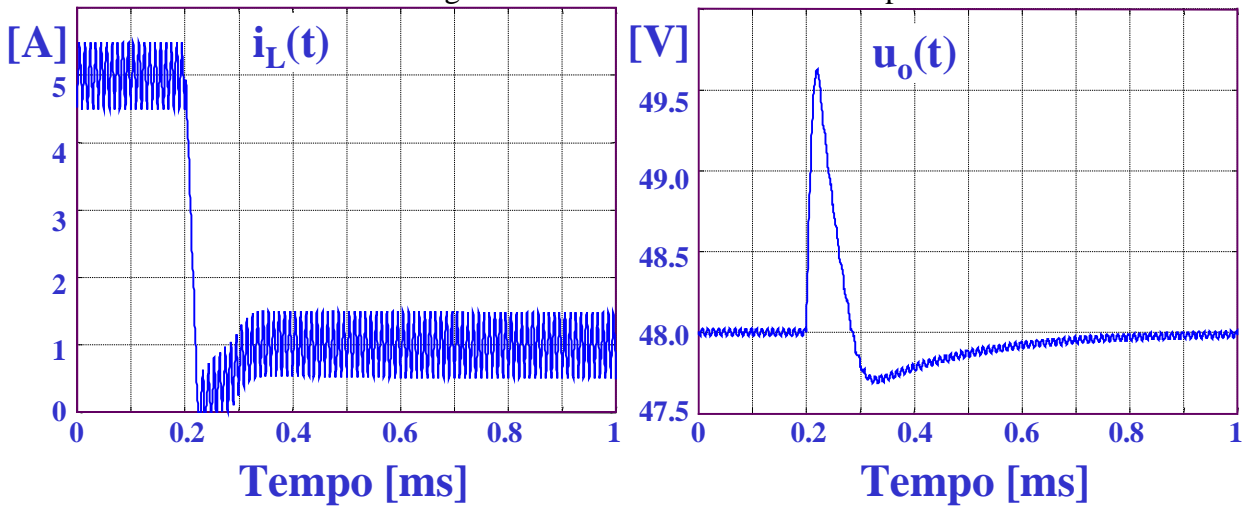
Da notare la forte riduzione della larghezza di banda in tale situazione.

## RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

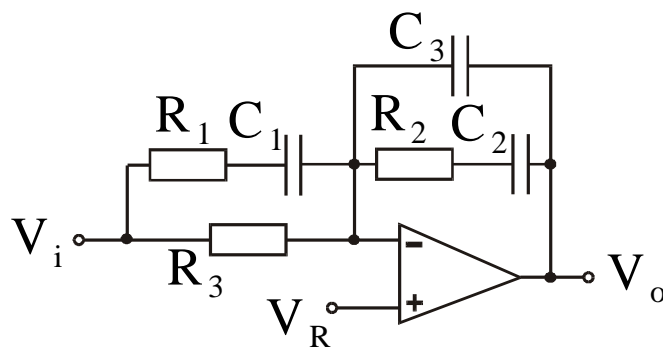
Variazione a gradino della tensione di ingresso nell'intervallo specificato:



Variazione a gradino del carico nell'intervallo specificato.



### DIMENSIONAMENTO DEL REGOLATORE PID



In figura è mostrato lo schema di un regolatore PID realizzato mediante un amplificatore operazionale. La sua f.d.t. risulta:

$$G_{\text{Reff}}(s) = -\frac{1}{s(C_2 + C_3)R_3} \frac{(1 + sR_2C_2)(1 + s(R_1 + R_3)C_1)}{(1 + sR_1C_1) \left( 1 + sR_2 \left( \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} \right) \right)} \quad (1)$$

$$\tau_{z1} = (R_1 + R_3)C_1 \quad (2)$$

$$\tau_{z2} = R_2C_2 \quad (3)$$

$$\tau_{p1} = R_1 C_1 \quad (4)$$

$$\tau_{p2} = R_2 \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \quad (5)$$

$$\frac{\tau_{z1}}{\tau_{p1}} = 1 + \frac{R_3}{R_1} \quad (6)$$

$$\frac{\tau_{z2}}{\tau_{p2}} = 1 + \frac{C_2}{C_3} \quad (7)$$

$$|\omega_R| = \frac{1}{R_3 C_3 \left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)} = \frac{1}{R_3 C_3} \frac{\tau_{p2}}{\tau_{z2}} \quad (8)$$

Un modo possibile per dimensionare il regolatore è di scegliere un valore per  $R_3$  e dalla (8) ricavare  $C_3$ , dalla (7)  $C_2$ , dalla (6)  $R_1$ , dalla (5)  $R_2$  e dalla (4)  $C_1$ :

$$R_3 := 68 \cdot 10^3$$

$$C_3 := \frac{1}{\omega_R \cdot R_3} \cdot \frac{f_{zr2}}{f_{pr2}} \quad C_3 = 3.222 \cdot 10^{-10} \quad C_3 := 330 \cdot 10^{-12}$$

$$C_2 := C_3 \cdot \left( \frac{f_{pr2}}{f_{zr2}} - 1 \right) \quad C_2 = 7.078 \cdot 10^{-9} \quad C_2 := 6.8 \cdot 10^{-9}$$

$$R_2 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{zr2} \cdot C_2} \quad R_2 = 5.254 \cdot 10^3 \quad R_2 := 5.6 \cdot 10^3$$

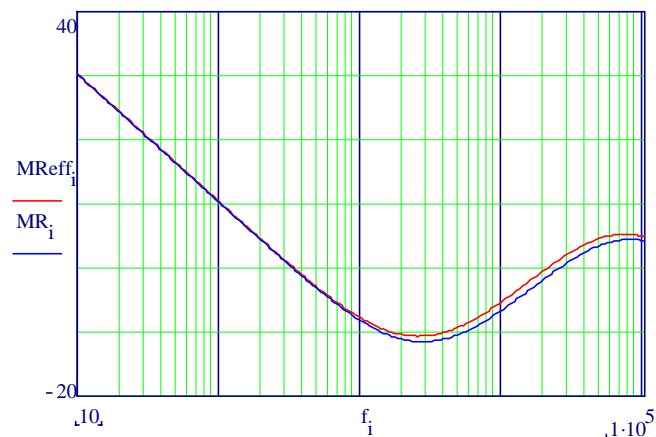
$$R_1 := \frac{R_3}{\frac{f_{pr1}}{f_{zr1}} - 1} \quad R_1 = 1.867 \cdot 10^3 \quad R_1 := 1.8 \cdot 10^3$$

$$C_1 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{pr1} \cdot R_1} \quad C_1 = 1.418 \cdot 10^{-9} \quad C_1 := 1.5 \cdot 10^{-9}$$

Utilizzando i valori scelti dei componenti possiamo confrontare le funzioni di trasferimento del regolatore effettivo e di quello ideale. Come si può osservare, la differenza è minima.

Confronto tra i diagrammi di bode del modulo di  $G_R(j\omega)$  e  $G_{\text{Reff}}(j\omega)$

(Y: -20dB÷40dB, 10dB/div; X: 10Hz÷100kHz)



Confronto tra i diagrammi di bode delle fasi di  $G_R(j\omega)$  e  $G_{\text{Reff}}(j\omega)$   
(Y:  $-180^\circ \div 180^\circ$ ,  $90^\circ/\text{div}$ ; X:  $10\text{Hz} \div 100\text{kHz}$ )

